ХАНТЫ-МАНСИЙСКИЙ АВТОНОМНЫЙ ОКРУГ – ЮГРА

БУ «МЕЖДУРЕЧЕНСКИЙ АГРОПРОМЫШЛЕННЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 09.02.06 «СЕТЕВОЕ И СИСТЕМНОЕ АДМИНИСТРИРОВАНИЕ»

Составитель: преподаватель математики,

Еськова И.П.

пгт. Междуреченский, 2019 г.

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Элементы высшей математики» для студентов 2 курсов специальности 09.02.06 «Сетевое и системное администрирование».

Аннотация:

Методические указания представляют собой разработку практических занятий по учебной дисциплине «Элементы высшей математики». В методичке представления задания практических занятий по разделам «Основы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Основы математического анализа», «Теория комплексных чисел», задания контрольных работ по некоторым разделам. Образцы представленных заданий для практических занятий были даны на теоретических занятиях. В начале каждого практического занятия даны формулы и основные понятия, используемые в соответствующем разделе. В итоге у каждого студента должен быть выработан определенный профессиональный подход к решению каждой задачи.

Методические указания предназначены для студентов и содействуют выработке умений и навыков применения знаний, полученных на теории и в ходе практической работы.

Содержание

1. Пояснительная записка. 3

2. Практическое занятие №1 по теме «Операции над матрицами». 6

3. Практическое занятие №2 по теме «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса». 7

4. Практическое занятие №3 по теме «Кривые второго порядка». 8

5. Практическое занятие №4 по теме «Нахождение неопределённого интеграла». 9

6. Практическое занятие №5 по теме «Исследование на сходимость и расходимость несобственных интегралов». 10

7. Практическое занятие №6 по теме «Предел функции. I и II замечательные пределы». 11

8. Практическое занятие № 7по теме «Решение дифференциальных уравнений». 13

9. Практическое занятие по №8 теме «Сходимость числовых рядов». 14

10. Практическое занятие №9 по теме «Действия с комплексными числами в тригонометрической форме». 16

11. Контрольная работа по разделу «Матрицы. Системы линейных уравнений». 17

12. Контрольная работа по разделу «Основы аналитической геометрии». 18

13. Контрольная работа по разделу «Основы математического анализа». 20

Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников СПО по специальности 09.02.06 Сетевое и системное администрирование и на основе рабочей программы дисциплины. Данная дисциплина относится к блоку естественнонаучных дисциплин, устанавливающих базовые знания для освоения ПМ.

В результате освоения дисциплины ЕН.01. Элементы высшей математики обучающийся должен **уметь:**

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел;

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основы теории комплексных чисел.

Сетевой и системный администратор **должен обладать общими компетенциями, включающими в себя способность:**

- ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.
- ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
- ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.
- ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.
- ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.
- ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей.
- ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.
- ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности.
- ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.
- ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.
- ОК 11. Планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере.

Сетевой и системный администратор **должен обладать профессиональными компетенциями, соответствующими видам деятельности:**

Выполнение работ по проектированию сетевой инфраструктуры

- ПК 1.1. Выполнять проектирование кабельной структуры компьютерной сети
- ПК 1.2. Осуществлять выбор технологии, инструментальных средств и средств вычислительной техники при организации процесса разработки и исследования объектов профессиональной деятельности.
- ПК 1.4. Принимать участие в приемо–сдаточных испытаниях компьютерных сетей и сетевого оборудования различного уровня и в оценке качества и экономической эффективности сетевой топологии.

Организация сетевого администрирования

–ПК 2.3. Обеспечивать сбор данных для анализа использования и функционирования программно-технических средств компьютерных сетей.

Эксплуатация объектов сетевой инфраструктуры

–ПК 3.5. Организовывать инвентаризацию технических средств сетевой инфраструктуры, осуществлять контроль оборудования после его ремонта.

Практическое занятие №1 по теме «Операции над матрицами»

I. Теория (кратко)

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$	Сложение матриц $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$	Умножение матрицы на число $A\cdot\lambda=\begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} \end{pmatrix}$
• **Матрица называется *транспонированной*, если в матрице заменить строки соответствующими столбцами. (Обозначение – A^T)**	Произведение матриц ***Произведением двух матриц*** $A_{mxn}=(a_{ij})$ **на матрицу** $B_{nxp}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{mxp}=(c_{ik})$ такая, что $c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+ a_{in}\cdot b_{nk}$.	

II. Практическая часть

1. Сложить матрицы А и В.

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

2. Умножить матрицу на число k.

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $k=3$; 2) $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 5 \\ -7 & -3 & 10 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $k = -0,5$

3. Вычислить линейную комбинацию матриц.

1) $3A-2B$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;

2) $2A+3B-C$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 9 \end{pmatrix}$;

3) $4A - C^T$; $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Найти произведение матриц *A* и *B*.

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

Практическое занятие №2 по теме «Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса».

I. Теоретическая часть (кратко).

СЛАУ - системы линейных алгебраических уравнений.

Решением системы линейных алгебраических уравнений называют набор значений неизвестных переменных $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, обращающий все уравнения системы в тождества. Матричное уравнение $A \cdot X = B$ при данных значениях неизвестных переменных также обращается в тождество $A \cdot X = B$.

Для решения СЛАУ методом Гаусса составляют расширенную матрицу из коэффициентов уравнений, добавляя столбец свободных членов.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} & b_p \end{array}\right)$$

Для расширенной матрицы СЛАУ можно выполнять следующие преобразования со строками:

- перестановку двух строк местами,
- умножение всех элементов какой-либо строки матрицы $\widetilde{A}$ на отличное от нуля число k,
- прибавление к элементам какой-либо строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на произвольное число k.

Метод Гаусса или *метод исключения неизвестных* состоит в последовательном исключении во <u>втором</u> уравнении <u>первой</u> неизвестной, в <u>третьем</u> уравнении <u>первой и второй</u> неизвестных и т. д. Пока не получится система треугольного или трапецеидального вида.

При решении методом Гаусса <u>удобно</u> (но вовсе не обязательно), чтобы первый элемент первой строки расширенной матрицы системы равнялся единице.

Метод Гаусса работает в два этапа: прямой ход и обратный.

Прямой ход метода Гаусса имеет своей целью приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Есть ли решения у системы (система совместна) или же решений нет (система несовместна) выяснится именно здесь, в конце прямого хода метода Гаусса.

В результате решения СЛАУ методом Гаусса получается диагональная матрица вида:

$$\left(\begin{array}{c|c} 100\dots0 & \alpha_1 \\ 010\dots0 & \alpha_2 \\ \dots & \\ 00\dots01 & \alpha_n \end{array}\right)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и есть искомые решения системы линейных уравнений.

II. Практическая часть.

Найдите решение СЛАУ, применив метод Гаусса.

№1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

№2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

№3.

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -3; \\ 2x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

№4.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

№5.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$$

№6.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 1 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 11 = 0. \end{cases}$$

№7.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 15; \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13; \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

№8.

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + 3x_3 = 51; \\ 3x_1 - 26x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 141; \\ -5x_1 + 47x_2 - 15x_3 + 5x_4 = -225; \\ 6x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -49; \\ x_1 - 16x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 111. \end{cases}$$

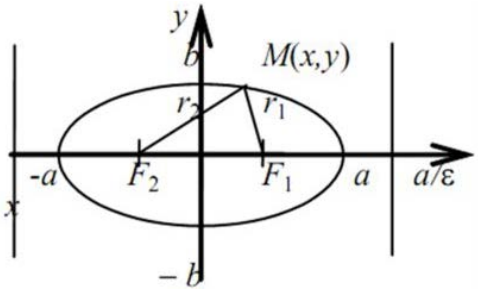
Практическое занятие №3 по теме «Кривые второго порядка»

I. Теория (кратко)

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая ***Г***, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, где не все коэффициенты A, B и C равны одновременно нулю.

- **Уравнение окружности с центром в точке *Mo* (x_0,y_0) и радиуса R имеет вид:** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

- ***Эллипсом*** называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до 2-х данных точек (фокусов) есть величина постоянная и равна ***2a.***



Приняты названия:

- 2a – большая ось эллипса, на ней расположены фокусы;
- 2b – малая ось эллипса, b < a;
- $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$– фокусы эллипса;
- 2c – расстояние между фокусами, c < a, $c^2 = a^2 - b^2$;
- $\bar{r}_2 = \overline{F_2M}$, $\bar{r}_1 = \overline{F_1M}$ – фокальные радиусы-векторы (по определению $r_1 + r_2 = 2a$);
- $\frac{c}{a} = \varepsilon$ называется эксцентриситетом, $\frac{c}{a} < 1$.

Формулы сокращённого умножения
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
Если координаты центра эллипса смещены относительно центра, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

- ***Гиперболой*** называется геометрическое место точек, разность расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть постоянная величина ***2a*** ($0<2a<F_1, F_2$).

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Параметр ***a*** называется вещественной полуосью, ***b*** – мнимой полуосью, $c = \sqrt{a^2+b^2}$ - расстояние от фокуса до центра симметрии O. Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются **асимптотами** гиперболы.

Уравнение гиперболы со смещённым центром: $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

II. Практическая часть

№1⁰. Написать уравнение окружности с центром в точке *A (-1, 2), R = 2.*

№2⁰. Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку M (2; 1).

№3⁰. Написать уравнение эллипса, если ***a* = 4, *b* = 3;** найти координаты фокусов и эксцентриситет ***ε*.**

№4⁰. Дана гипербола $x^2 - 4y^2 = 16$. 1)Написать каноническое уравнение гиперболы; 2)Найти вещественную и мнимую полуоси; 3) Найти асимптоты гиперболы; 4) Вычислить эксцентриситет **ε**.

№5⁰. Для указанных окружностей определить координаты центра ***S*** и радиус ***R***:

а) $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 29 = 0$; *б)* $x^2 + y^2 + 7y - 18 = 0$.

№6. Найти координаты вершин, оси, фокусы и эксцентриситет эллипса: $4x^2+9y^2=36$.

№7. Найти координаты вершин, оси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы:

а) $4x^2-5y^2-100=0$**;** *б)* $x^2-y^2+4x-10y-25=0$

Практическое занятие №4 по теме «Нахождение неопределённого интеграла («антипроизводная»)».

I. Теория.

Интегрирование - действие, обратное дифференцированию, а именно, восстановление функции по известной производной этой функции. Восстановленная таким образом функция *F*(*x*) называется *первообразной* для функции *f*(*x*).

Определение 1. **Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на некотором промежутке X, если для всех значений *x* из этого промежутка выполняется равенство *F '(x)=f(x),* то есть данная функция *f(x)* является производной от первообразной функции *F(x).***

Например, функция *F(x) = sin x* является первообразной для функции *f(x) = cos x* на всей числовой прямой, так как при любом значении икса *(sin x)' = (cos x).*

Определение 2. **Неопределённым интегралом функции *f*(*x*) называется совокупность всех её первообразных.** При этом употребляется запись $\int f(x)dx$.

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где С - произвольная постоянная (константа).

Свойства неопределённого интеграла

1⁰.*Постоянный множитель в подынтегральном выражении можно выносить за знак неопределённого интеграла, т.е.*

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

2⁰. *Неопределённый интеграл алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределённых интегралов этих функций, т.е.*

$$\int\left[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)\right]dx = \int f(x)dx+\int\varphi(x)dx-\int\psi(x)dx.$$

3⁰. *Неопределённый интеграл от дифференциала функции f(x) равен функции f(x) с точностью до постоянного слагаемого, т.е.* $\int df(x) = f(x)+C.$

4⁰. *Если выражение подынтегральной функции содержит постоянный множитель, то выражение первообразной домножается на число, обратное постоянному множителю, то есть*

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$$

Таблица неопределённых интегралов

1. $\int dx = x+C$	7. $\int e^x dx = e^x + C;$	13. $\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\ x+C;$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ (n\neq -1);$	8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C\ (a>0,\ a\neq 1);$	14. $\int\frac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x+C;$
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C$	9. $\int\sin x\,dx = -\cos x+C;$	15. $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$

4. $\int \sqrt{x}dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$	10. $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$	16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
5. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	11. $\int \mathrm{tg}\ x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
6. $\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}dx = \ln\lvert x\rvert + C;$	12. $\int \mathrm{ctg}\ x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Дополнительная информация.

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3b^2a \pm b^3$; $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Степень с дробным показателем. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ и т. д.

II. Практическая часть.

Найдите неопределённый интеграл.

1. $\int 2xdx$	9. $\int \frac{3dx}{2\sqrt{x}}$	17. $\int \frac{2dx}{x^2-25}$	25. $\int \frac{dx}{sin^2x \cdot cos^2x}$
2. $\int -6.5dx$	10. $\int (x^{-3} + 2x^3)dx$	18. $\int \frac{6dx}{\sqrt{16-x^2}}$	26. $\int \frac{x^2-x+2}{x}dx$
3. $\int -6x^2dx$	11. $\int \left(\sqrt[3]{x} + 6x^2 + 5\right)dx$	19. $\int \frac{3}{2+2x^2}dx$	27. $\int (4\sqrt{x} + 6x^2 - 5\sqrt[5]{x})dx$
4. $\int (3x^2 + 1)dx$	12. $\int (3\sqrt{x} - 5x^4 - \sqrt[3]{x})dx$	20. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$	28. $\int \frac{dx}{x^2+6x-7}$
5. $\int (\cos x - 2\sin x)\, dx$	13. $\int (\cos 7x + \sqrt{3})dx$	21. $\int (x^4 + 1)x^3dx$	29. $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$
6. $\int \frac{-6.5dx}{x}$	14. $\int (\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{3})dx$	22. $\int (3 - x)^3dx$	30. $\int \frac{x^3-3x+4}{x-2}dx$
7. $\int 2tg3xdx$	15. $\int (\sin 2x - 1)dx$	23. $\int \frac{(\sqrt{x}-3x)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$	31. $\int \frac{6x+1}{x^2-6x+8}dx$
8. $\int \frac{5dx}{sin^2 4x}$	16. $\int \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{4}{x^3} + 1\right)dx$	24. $\int (2e^x + 2^x)dx$	32. $\int \frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}dx$

Практическое занятие №5 по теме «Исследование на сходимость и расходимость несобственных интегралов»

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + C$	**8.** $\int \frac{dx}{cos^2x} = tg\ x + C$	**15.** $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x + C$
2. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$	**9.** $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctg\ x + C$	**16.** $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\ \frac{x}{a} + C$
3. $\int x^ndx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	**10.** $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$	**17.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\ x + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$	**11.** $\int \sqrt{x}dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$	**18.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\ \frac{x}{a} + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\ a} + C$	**12.** $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	**19.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k}} = ln\left\|x + \sqrt{x^2+k}\right\| + C$
6. $\int sin\ x\ dx = -cos\ x + C$	**13.** $\int \frac{dx}{x-a} = ln\|x-a\| + C$	**20.** $\int \frac{xdx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} ln\left\|a^2+x^2\right\| + C$
7. $\int cos\ x\ dx = sin\ x + C$	**14.** $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$	**21.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

Правила вычисления интегралов:

1. Константу можно выносить за знак интеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

2. Интеграл от суммы/разности равен сумме/разности интегралов

$$\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Понятие **несобственного интеграла** является обобщением понятия определённого интеграла на случай, когда либо промежуток интегрирования бесконечен, либо подынтегральная функция в некоторых точках неограниченна или неопределенна.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx;\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx;\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} F(x)\Big|_A^B$$

Если существует несобственный интеграл, то говорят, что он **сходится**, в случаях, если несобственный интеграл не существует или равен бесконечности, то говорят, что он **расходится.**

№1. Найдите неопределённый интеграл:

1. $\int \left(5x^4 - 3\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)dx;$
2. $\int (3\sin x + 2^x \cdot 3^x - 5)\,dx;$
3. $\int (\cos x - 3e^{2x} + \frac{1}{cos^2 x})dx;$
4. $\int \sqrt[4]{(2x-3)^5}dx;$
5. $\int \frac{\cos 2x}{sin^2 x \cdot cos^2 x}dx;$
6. $\int \left(x^7 - 3\sqrt{x} + 5^x\right)dx;$
7. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5};$
8. $\int \frac{dx}{x^2+4x+20};$
9. $\int \frac{7dx}{\sqrt{16-x^2}};$
10. $\int \frac{(3x+9)dx}{x^2-x-12};$
11. $\int \frac{(6x+1)dx}{16^2+x^2};$
12. $\int \frac{4dx}{\sqrt{x^2-3}}.$

№2. Определите, сходится или расходится несобственный интеграл:

1.	$\int_e^{\infty} \frac{2}{x}dx;$	4.	$\int_{-\infty}^{0} \cos 5x dx;$	7.	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1};$	10.	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2};$
2.	$\int_0^{\infty} e^{-2x}dx;$	5.	$\int_1^{\infty} \frac{-4dx}{x^2+1};$	8.	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10};$	11.	$\int_0^{\infty} \frac{4dx}{\sqrt{x+2}};$
3.	$\int_e^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$	6.	$\int_0^{\infty} 7\sin x\ dx;$	9.	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1};$	12.	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$

Практическое занятие №6 по теме «Предел функции. I и II замечательные пределы»

I. Теория (кратко).

Первым замечательным пределом называется равенство: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$ **(1)**

Так как при $x\to 0$ имеем $\sin x\to 0$, то говорят, что первый замечательный предел раскрывает неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

Вторым замечательным пределом называется равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e; e\approx 2{,}72$ **(2)**

или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$ **(3)**

Вообще говоря, в формуле (1) вместо переменной ***x*** под знаком синуса и в знаменателе может быть расположено любое выражение, – лишь бы выполнялись два условия:

1. Выражения под знаком синуса и в знаменателе одновременно стремятся к нулю, т.е. присутствует неопределенность вида $\frac{0}{0}$.
2. Выражения под знаком синуса и в знаменателе совпадают.

Справедливо подобное утверждение и для II замечательного предела: в формуле (2) вместо переменной ***x*** в знаменателе дроби и показателе степени всего выражения может стоять любое выражение, лишь бы они были одинаковые. Правда, вычисление предела, в этом случае, может значительно усложниться.

Часто используются также **следствия из I замечательного предела**:

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1$; **5)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; **6)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\,x}{x}=1$; **7)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}=\frac{a}{b}$; **8)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=1$

Следствия из **II замечательного предела:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$; **(9)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \textbf{(10)}$$

II. Практика.

№1. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ *б)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ *в)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$ *г)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x^2-5x+1}{8x^2-9x+1}$

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2-9x}{6x^3-x+1}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^3-x^2}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{5x^4+1}{8x^2-11x+1}$ *з)* $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{3x^2-13x+4}$

№2. Вычислите пределы, используя формулы I замечательного предела и следствия из него:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{4x}$ *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,5x}{15x}$ *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\,2x}{3x}$ *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^3-2x)}{2x-x^4}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{tg\,3x}$ *з)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}$ *и)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^3+3x)}{5x-x^5}$

№3. Вычислите пределы, используя формулы II замечательного предела и следствия из него:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$ *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$ *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^{2x}$ *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{\sin 2x}$ *з)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{tg9x}$ *и)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$

Практическое занятие №7 по теме «Решение дифференциальных уравнения»

Таблица интегралов

8. $\int dx = x + C$	**8.** $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + C$	**15.** $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$
9. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	**9.** $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\, x + C$	**16.** $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C$
10. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	**10.** $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$	**17.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$
11. $\int e^x dx = e^x + C$	**11.** $\int \sqrt{x} dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$	**18.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\, \frac{x}{a} + C$
12. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$	**12.** $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	**19.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k}} = ln\left\|x + \sqrt{x^2+k}\right\| + C$
13. $\int sin\, x\, dx = -cos\, x + C$	**13.** $\int \frac{dx}{x-a} = ln\|x-a\| + C$	**20.** $\int \frac{xdx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} ln\left\|a^2+x^2\right\| + C$
14. $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C$	**14.** $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$	**21.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

Правила вычисления производных: ***1. $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$***

2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

Дифференциальное уравнение (ДУ) – это уравнение, в которое входит неизвестная функция под знаком производной или дифференциала.

Дифуравнение вида $y'' + py' + qy = 0$ называется **линейным однородным дифференциальным уравнений второго порядка** с постоянными коэффициентами, где p и q – произвольные действительные числа.

Алгоритм нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$.

1. Записываем характеристическое уравнение $k^2 + p \cdot k + q = 0$.
2. Находим корни характеристического уравнения k_1 и k_2.
3. В зависимости от значений корней характеристического уравнения записываем общее решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами в виде:

- $y_0 = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$, если $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in R$;
- $y_0 = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot x \cdot e^{k_2 x}$, если $k_1 = k_2 = k_0$, $k_0 \in R$;
- $y_0 = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cdot cos\beta x + C_2 \cdot sin\, \beta x)$, если $k_1 = \alpha + i \cdot \beta, k_2 = \alpha - i \cdot \beta$.

Практическая часть.

№1. Найдите общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

а) $y' = -3$; г) $y' = \frac{3}{x^2+9}$; ж) $y' = \frac{1}{x-5}$; к) $cos\, x \cdot y' = sin\, x$; н) $2y' \cdot \sqrt{x-3} = x - 3$;

б) $y' = x + e^x + 2$; д) $y' = \frac{4dx}{sin^2 x \cdot cos^2 x}$; з) $y' = \frac{3}{2x-5}$; л) $y' \cdot (x^2 - 2x) = 2x - 2$ о) $y' \cdot (x^3 - 1) = 3x^2$;

в) $y' = 2\sqrt{x-3} + 1$; е) $y' = \frac{4dx}{\sqrt{16-x^2}}$; и) $2x \cdot y' = \frac{4x}{x^2+16}$; м) $y' \cdot (x - 2) = \frac{4}{x+2}$; п) $y' \cdot \sqrt{9-x^2} = 4$.

№2. Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 2y' + y = 0$ в) $9y'' - 6y' + y = 0$ д) $y'' - 4y' + 6y = 0$

б) $y'' + 6y' + 8 = 0$ г) $4y'' - 2y' + y = 0$ е) $3y'' - 6y' + 6y = 0$

№3. Найти решение уравнения ЛОДУ II порядка, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $y'' + 5y' - 6y = 0;$ $y(1)=0;\ y'(1) = 1.$

б) $y'' + 10y' + 25y = 0;$ $y(0)=6;\ y'(0) = 0.$

в) $y'' - 4y' + 3y = 0;$ $y(0)=4;\ y'(0) = 0.$

Практическое занятие №8 по теме «Сходимость числовых рядов».

I. Теория (кратко)

Числовой ряд – это сумма членов числовой последовательности вида: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$.

a_k называют **общим членом числового ряда** или *k–ым* членом ряда.

Частичная сумма числового ряда – это сумма вида $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, где n – некоторое натуральное число. S_n называют также ***n-ой* частичной суммой** числового ряда.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim_{n \to \infty} S_n$. Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_k$ называется **расходящимся.**

Суммой сходящегося числового ряда называется предел последовательности его частичных сумм, то есть, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} S_n = S$.

Сумма вида $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ называется **гармоническим числовым рядом**.

Сумма вида $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$, где s – некоторое действительное число, называется **обобщенным гармоническим числовым рядом**.

Необходимое условие сходимости числового ряда

Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Часто используемые утверждения, которые можно запомнить:

1. **Гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ является расходящимся.**
2. **Сумма геометрической прогрессии вида $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^n + \ldots = \sum b_1 q^{k-1}$ со знаменателем q является сходящимся числовым рядом, если $|q| < 1$ и расходящимся рядом при $|q| > 1$.**
3. **Обобщенно гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ сходится при s > 1 и расходится при $s \leq 1$.**

Свойства числовых рядов.

1^0. Поведение ряда относительно сходимости не изменится, если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2^0. Если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и его сумма равна S, то сходящимся будет и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A \cdot a_k$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} A \cdot a_k = A \cdot S$, где A – произвольная постоянная.

3^0. Если сходятся числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, их суммы равны A и B соответственно, то сходящимися будут ряды $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ и $\sum(a_k - b_k)$, причем их суммы будут равны $A + B$ и $A - B$ соответственно.

Признак Даламбера сходимости числовых рядов

Рассмотрим **положительный числовой ряд** $\sum a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то:

а) При D < 1 ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при D = 0.

б) При D > 1 ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при D = ∞.

в) При D = 1 **признак не дает ответа**.

II. Практическая часть

№1. Выясните, сходится или расходится числовой ряд:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4}{3k}$ в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{5}{4k^2\cdot\sqrt{k}}$ д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{6+\sqrt[3]{k}}{k^{\frac{7}{3}}}$

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4+k}{3k^2}$ г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{5+\sqrt{k}}{3\sqrt{k}}$ е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3\cdot\sqrt[4]{k}-2k}{2k^{2,25}}$

№2. Используя необходимое условие сходимости числовых рядов, выясните, сходится ли числовой ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3n}{n^3+1}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-5n^2}{3n+6n^2}\right)^3$ в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n}{n^3-1}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4}{n+2}$

№3. Используя признак Даламбера сходимости числовых рядов, выясните, сходится ли числовой ряд:

а) ряд задан формулой общего (n-ого) члена: $\boldsymbol{U_n = \frac{n}{2^n}}$	б) $\frac{4}{3}+\frac{16}{16\cdot 9}+\frac{64}{81\cdot 27}+\cdots+\frac{4^n}{n^4\cdot 3^n}+\cdots$
в) ряд задан формулой общего (n-ого) члена: $\boldsymbol{a_n = \frac{n}{(n+1)^3}}$	г) $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\cdots$
д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{4^{n+2}}$
ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$	з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{7^{2n}}$

№4. Найдите сумму числового ряда:

а) $1-6+\frac{1}{2}-2+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\cdots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2\cdot 4^{-n}+5\cdot 2^{2-n})$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}$

г) $0,5+0,05+0,005+\ldots+5\cdot 0,1^n+\ldots$

Признак сходимости Коши

Пусть существует предел корня n-й степени из общего члена ряда: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = p$
Тогда

- если предел меньше единицы ($p < 1$), то ряд сходится,
- если предел больше единицы ($p > 1$), то ряд расходится,
- если же предел равен единице ($p = 1$), то ничего определённого о сходимости ряда сказать нельзя.

№5. Используя признак Коши сходимости числовых рядов, выясните, сходится ли числовой ряд:

Для решения заданий используйте свойства пределов: $\lim\limits_{n \to \infty} \arcsin a = \arcsin \lim\limits_{n \to \infty} a$

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{5n-2}\right)^n$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-5}\right)^n$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2-3}{4n^2+2}\right)^n$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4-5n^3}{7n+5n^3}\right)^{2n}$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arcsin^n \frac{6n+12}{12n-5}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arccos^n \frac{6n+13}{3n-5}$

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{2n-1}\right)^{3n+2}$

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+n}{6+2n^2}\right)^{n-3}$

Практическое занятие №9 по теме «Действия с комплексными числами в тригонометрической форме»

I. Теория (кратко)

Комплексное число записывается в виде: $z = x + iy$; число x называется ***действительной частью*** комплексного числа z ***(Re z)***, а y ***– мнимой частью z (Im z).*** Если мнимая часть равна 0 (y=0), то комплексное число превращается в действительное. Сама запись $z = x + iy$ называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа имеет следующий вид:

$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. Эта форма оказывается особенно удобной при перемножении комплексных чисел. r- модуль комплексного числа; φ – аргумент комплексного числа.

При умножении двух комплексных чисел (записанных в тригонометрической форме) их модули перемножаются, а аргументы складываются. При делении – необходимо поделить модули и вычесть аргументы.

Например, найти произведение и частное двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме: $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6})$ и $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3})$.

1) $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \cdot (\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})) = 6 \cdot (\cos\frac{3\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{6}) = 6 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}) = 6 \cdot (0 + i \cdot 1) = 6i.$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right) =$
$= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} i.$

При возведении комплексного числа в n- ую степень используют формулу *Муавра:*

$(r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi))^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$

Например, возвести в степень $n = -3$ комплексное число $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6})$;

$z^{-3} = 2^{-3} \cdot (\cos\frac{-3\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{-3\pi}{6}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{8} \cdot (\cos\frac{\pi}{2} - i \cdot \sin\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{8}(0 - i \cdot 1) = -\frac{1}{8}i.$

II. Практическая часть.

№1. Найдите произведение и частное комплексных чисел:

а) $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2})$ и $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$;

б) $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$ и $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3})$;

в) $z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4})$ и $z_2 = 1{,}5(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$;

г) $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$ и $z_2 = \sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12})$;

д) $z_1 = 5(\cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\sin\frac{\pi}{8})$ и $z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{24} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{24})$.

№2. Используя формулу Муавра, возведите в *n*–ую степень комплексное число:

а) $z = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$, $n = -3$;

б) $z = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4})$, $n = 2$;

в) $z = \cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\sin\frac{\pi}{8}$, $n = -8$;

г) $z = \sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12})$, $n = -4$;

д) $z = \cos\frac{3\pi}{24} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{24}$, $n = 12$.

Справочный материал

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ – четность функции;

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ – нечётность функции.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

Контрольная работа по теме «Матрицы. Системы линейных уравнений»

Вариант 1

№1⁰. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу:

$D = A + B$; $E = A\cdot C$; $K = 2C - 0{,}5B$.

№2⁰. Вычислите определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

№3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса и методом Крамера. $\begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ 2x - 3y + 5z = 16 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{cases}$

Контрольная работа по теме «Матрицы. Системы линейных уравнений»

Вариант 2

№1⁰. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу:

$D = A + B$; $E = A \cdot C$; $K = 2C - 0{,}5A$.

№2⁰. Вычислите определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

№3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса и методом Крамера. $\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 3y - 5z = 6 \\ 3x - 2y + 6z = 6 \end{cases}$

Контрольная работа по теме «Матрицы. Системы линейных уравнений»

Вариант 3

№1⁰. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу:

$D = A + B$; $E = A \cdot C$; $K = 2A - 0{,}5C$.

№2⁰. Вычислите определитель: $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}$

№3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса и методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

Контрольная работа по разделу «Основы аналитической геометрии»

Вариант 1

№1⁰. Даны координаты трех векторов в прямоугольной системе координат $\vec{a} = \{0; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1; 1\}$, $\vec{d} = \{3; -2; 3\}$. Найдите смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$.

№2⁰. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \{3; 2; 1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{1; 0; -2\}$, $\overrightarrow{AA_1} = \{2; 2; 1\}$, заданных в прямоугольной системе координат.

№3. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами A(2; 1; 2), B(0; 3; 3), C(-4; 5; 4), D(5;-1;2).

№4⁰. Написать уравнение эллипса, если $a = 6$, $b = 8$; найти координаты фокусов и эксцентриситет ε.

№5⁰. Дана гипербола $4x^2 - y^2 = 16$. Написать каноническое уравнение гиперболы и найти её эксцентриситет ε.

№6. Для указанных окружностей определить координаты центра S и радиус R:
а) $9x^2 + 9y^2 - 72 + 18y - 208 = 0$; б) $4x^2 + 4y^2 + 16x - 32y - 41 = 0$.

№7. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

№8. Написать уравнение гиперболы, у которой вещественная ось равна 8, а расстояние между фокусами, лежащими на оси OX, равно 10.

Вариант 2

№1⁰. Даны координаты трех векторов в прямоугольной системе координат $\vec{a} = \{3; -1; 0\}, \vec{b} = \{2; -1; 1\}, \vec{d} = \{1; -2; 4\}$. Найдите смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$.

№2⁰. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \{3; 0; -1\}, \overrightarrow{AC} = \{3; 2; -2\}$, $\overrightarrow{AA_1} = \{-2; 2; 3\}$, заданных в прямоугольной системе координат.

№3. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами A(-2; 1; 0), B(1; 3; -3), C(-4; 0; 4), D(1;-1;2).

№4⁰. Составить уравнение окружности, если центр окружности совпадает с точкой C (2;-3) и ее радиус равен 7.

№5⁰. Дан эллипс $16x^2 + 9y^2 = 144$. Написать каноническое уравнение эллипса и найти его эксцентриситет ε.

№6. Найти координаты вершин, оси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы:
а) $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$; б) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$

№7. Вершины квадрата лежат на гиперболе $9x^2 - 4y^2 = 125$. Найти его площадь.

№8. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси OY, имеющей вершину в начале координат, если она проходит через точку A(-2;4).

Вариант 3

№1⁰. Даны координаты трех векторов в прямоугольной системе координат $\vec{a} = \{3; 0; -2\}, \vec{b} = \{-2; 2; 1\}, \vec{d} = \{4; -2; 1\}$. Найдите смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$.

№2⁰. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \{-3; 2; 0\}, \overrightarrow{AC} = \{1; 2; -2\}$, $\overrightarrow{AA_1} = \{3; -2; 1\}$, заданных в прямоугольной системе координат.

№3. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами A(3; 0; 2), B(-1; 2; 3), C(-4; 5; 0), D(4;-1;2).

№4⁰. Составить уравнение окружности с центром в заданной точке S и данным радиусом r: *S (-6; 3)*, $r = \sqrt{2}$.

№5⁰. Найти координаты вершин, оси, фокусы и эксцентриситет эллипса: $25x^2 + 9y^2 = 900$.

№6. Найти координаты вершин, оси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы:

а) $4x^2 - 5y^2 - 100 = 0$; б) $x^2 - 3y^2 + 6y - 15 = 0$

№7. Вершины квадрата лежат на гиперболе $9x^2 - 4y^2 = 125$. Найти его площадь.

№8. Написать уравнение гиперболы, у которой вещественная ось равна 8, а расстояние между фокусами, лежащими на оси OX, равно 12.

Вариант 4

№1⁰. Даны координаты трех векторов в прямоугольной системе координат $\vec{a} = \{3; -1; 1\}$, $\vec{b} = \{5; -1; 0\}$, $\vec{d} = \{1; 2; -4\}$. Найдите смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$.

№2⁰. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \{-3; 1; 1\}, \overrightarrow{AC} = \{3; 5; -2\}$, $\overrightarrow{AA_1} = \{-2; 4; 0\}$, заданных в прямоугольной системе координат.

№3. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами *A(2; 0; 2), B(2; 3; -3), C(-4; 1; 2), D(1;-1;3).*

№4⁰. Составить уравнение окружности, если окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой C(6;-8).

№5⁰. Найти координаты вершин, оси, фокусы и эксцентриситет эллипсов: $4x^2 + 9y^2 = 36$

№6. Для указанных окружностей определить координаты центра S и радиус R:

а) $16x^2 + 16y^2 - 32y - 144 = 0$; б) $9x^2 + 9y^2 + 18x - 54y - 162 = 0$.

№7. Составить уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами 10 и ось $2b = 8$.

№8. Составить уравнение параболы, если она расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку C(1;1).

Контрольная работа темам «Интеграл», «Дифференциальные уравнения», «Ряды»

Справочный материал

15. $\int dx = x + C$	**8.** $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + C$	**15.** $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$
16. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	**9.** $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\, x + C$	**16.** $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C$
17. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	**10.** $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$	**17.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$
18. $\int e^x dx = e^x + C$	**11.** $\int \sqrt{x} dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$	**18.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\, \frac{x}{a} + C$
19. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$	**12.** $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	**19.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k}} = ln\left\|x + \sqrt{x^2+k}\right\| + C$
20. $\int sin\, x\, dx = -cos\, x + C$	**13.** $\int \frac{dx}{x-a} = ln\|x-a\| + C$	**20.** $\int \frac{xdx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} ln\|a^2 + x^2\| + C$
21. $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C$	**14.** $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$	**21.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

Вариант I

№1⁰. Найдите неопределённый интеграл:

4. $\int(3\cos x + 7^x \cdot 3^x)\,dx$; 3. $\int \sqrt[4]{(x-3)^5}dx$;

5. $\int(6\cos x - 3e^{2x})dx$; 4. $\int \frac{dx}{x^2+2x+26}$;

№2⁰. Определите, сходится или расходится несобственный интеграл:

2. $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$; 3. $\int\limits_1^\infty \frac{-2dx}{1+x^2}$; 5. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{4dx}{x^2+1}$;

2. $\int\limits_e^\infty \frac{xdx}{x^2+4}$ 4. $\int\limits_0^\infty 7\sin x\,dx$; 6. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-6x+13}$;

№3⁰. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

1. $y' = 2\sqrt{x-2}+7$ 3. $\sin x \cdot y' = 2\cos x$; 5. $y'' + 2y' + y = 0$;

2. $y' = \frac{4dx}{\sqrt{16-x^2}}$; 4. $y' \cdot (x^2 - 3x) = 2x - 3$; 6. $4y'' + 2y' + y = 0$

№4⁰. Выясните сходимость числового ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{5}{6n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n^4-2n^2+15}{23-5n+n^5}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^\infty \left(\frac{6+2n}{8+7n}\right)^n$

2. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{7}{9n^3}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{5n-1}{3^n}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{5^{2n}\cdot(3n-2)}{(2n-1)!}$

№5. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:
$3y'' - 5y' - 8y = 0,\ y'(0) = 2;\ y(0) = 1$

№6. Найдите сумму ряда:

1. 2 + 0,2 + 0,02 + 0,002 + 0,0002 + …
2. $\sum\limits_{n=1}^\infty (4\cdot 2^{3-n} + 5\cdot 3^{2-n})$

Вариант II

№1⁰. Найдите неопределённый интеграл:

6. $\int(2\cos x + 5x^4)\,dx$; 3. $\int \frac{8}{\sqrt{25-x^2}}dx$;

7. $\int(\frac{6}{cos^2 x} - 3e^{6x})dx$; 4. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$;

№2⁰. Определите, сходится или расходится несобственный интеграл:

3. $\int\limits_0^\infty 2e^{-x}dx$; 3. $\int\limits_1^\infty \frac{-2dx}{1+x^2}$; 5. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{4dx}{x^2+1}$;

2. $\int\limits_e^\infty \frac{xdx}{x^2+9}$ 4. $\int\limits_0^\infty 7\sin x\,dx$; 6. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-6x+13}$;

№3⁰. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

1. $y' = \sqrt{2x-1} + 4$
2. $y' = \frac{2dx}{\sqrt{64-x^2}}$;
3. $2\cos x \cdot y' = \sin x$;
4. $y' \cdot (x^3 - 3x) = 3x^2 - 3$;
5. $y'' + 4y' + 4y = 0$;
6. $y'' - 7y' + 12y = 0$

№4⁰. Выясните сходимость числового ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{6\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{9n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15n-11}{4^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8 - 2n^2 + 1}{23 - 5n^{10} + n^5}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+24n}{8n+2}\right)^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n} \cdot (3n-4)}{(3n-1)!}$

№5. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$2y'' - 12y' + 18y = 0$, $y(0)=4$; $y'(0) = 0$

№6. Найдите сумму ряда:

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (5 \cdot 2^{3-2n} + 4 \cdot 3^{1-n})$
4. $1 - 8 + \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{1}{27} - \frac{1}{8} + \cdots$