Практические занятия по математической статистике

Практическое занятие №1 по теме «Математическое ожидание и закон распределения ДСВ»

Теория.

Математическое ожидание *M(X)* дискретной случайной величины *X* это сумма произведений всех возможных значений величины *X* на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n \text{ или } M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Дисперсией (рассеиванием) случайной величины *X* называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины *X* от своего математического ожидания *(X – M(X))*.

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

Среднее квадратичное отклонение – это корень квадратный из дисперсии. $\sigma = \sqrt{D(X)}$

Её обозначают греческой буквой «сигма».

Задачи.

№1. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_1	0,3	0,3	0,1	0,3	0

Найдите математическое ожидание и дисперсию ДСВ.

№2. В продаже имеется 1000 лотерейных билетов. Среди них выигрышных билетов: 150 билетов по 20 рублей; 120 билетов по 40 рублей; 150 билетов по 100 рублей и 180 билетов по 150 рублей. Оставшиеся невыигрышные билеты равномерно распределены по ценам. Составьте закон распределения ДСВ и найдите математическое ожидание и дисперсию.

№3. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_1	0,3	0,2	p_3	0,3	0,1

Найдите математическое ожидание и дисперсию ДСВ.

№4. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_1	0,2	0,1	0,2	p_4	p_5

Найдите дисперсию ДСВ, если M(X) = 0,1

№5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	-2	-1	3	8	9
p_1	$4p$	0,2	0,3	p	0,4

Найдите: а) *p*; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

№6. Дискретная случайная величина (ДСВ) X задана законом распределения:

x_i	-4	-2	x
p_1	0,3	0,5	p

Известно, что M(X) = -1,8.

Найдите: p , x , $D(X)$, σ.

Самостоятельная работа

1. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень. Найти математическое ожидание и дисперсию ДСВ.

2. Выпущено 1000 лотерейных билетов: на 5 из них выпадает выигрыш в сумме 500 рублей, на 10 – выигрыш в 100 рублей, на 20 – выигрыш в 50 рублей, на 50 – выигрыш в 10 рублей. Определить закон распределения вероятностей случайной величины X – выигрыша на один билет.

3. Составить закон распределения числа попаданий в цель при трёх выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,85.

4. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

5. Пусть имеется два варианта инвестирования со следующими характеристиками:

Вероятности возможной прибыли								
	Сравнение вариантов решения							
Чистая прибыль, млн. д.е.	***-3***	***-2***	***-1***	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***
Вероятности:								
Инвестиция 1	**0**	**0**	**0,1**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,2**	**0**
Инвестиция 2	**0,1**	**0,1**	**0,1**	**0,1**	**0,1**	**0,1**	**0,2**	**0,2**

Риск может быть определен с помощью дисперсии и (или) среднего квадратического отклонения

Замечание.

1. При решении самостоятельной работы для определения вероятностей событий нужно применять теоремы о сложении и умножении вероятностей.

2. Формула Бернулли $\boldsymbol{P_n(k) = C_n^m \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$ **–** формула вероятности k успехов в серии из n – испытаний, где p – вероятность успеха, $q = 1-p$ - вероятность неудачи.

3. $\boldsymbol{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$ – формула числа сочетаний.

Практическое занятие №2 по теме «Математическое ожидание непрерывной случайной величины»

Числовая характеристика	Обозначение и формула
Математическое ожидание НСВ X	$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
Если все возможные значения X ∈(a, b), то математическое ожидание вычисляют	$M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx$
Дисперсия НСВ X	$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(x))^2 f(x)dx$
Иначе	$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2$
Если все возможные значения X ∈ (a, b), то дисперсию вычисляют	$D(X)=\int_{a}^{b}(x-M(x))^2 f(x)dx$
Иначе	$D(X)=\int_{a}^{b} x^2 f(x)dx-(M(X))^2$
Среднее квадратическое отклонение НСВ X	$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

Задача 1. Случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ x-1, \text{ при } 0 < x \le 2 \\ 0, \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Задача 2. Случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 1; \\ x-2, \text{ при } 1 < x \le 2 \\ 0, \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Задача 3. Случайная величина X задана функциеи распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ x^2, \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 0, \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

Найдите: а) дифференциальную функцию *f(x)* (плотность распределения),
6) математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), среднее квадратическое отклонение σ(X).

Задача 4. Случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ \frac{1}{2}x, \text{ при } 0 < x \le 2 \\ 1, \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Задача 5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ \frac{1}{10}(x^3+x), \text{ при } 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Задача 6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ 3\sqrt{x}, \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 2, \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

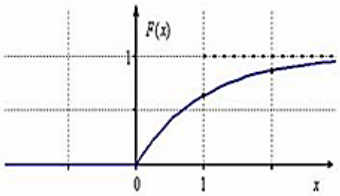
Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Практическое занятие №3 по теме «Показательное распределение СВ»

- Функция распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, x\geq 0\end{cases}$$

- где $\lambda>0$



- Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины X в интервал $(x_1;x_2)$, расположенный внутри $[0;+\infty)$

$$P(x_1<X<x_2)=e^{-\lambda x_1}-e^{-\lambda x_2} \qquad e\approx 2,72$$

- ***Математическое ожидание***

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}$$

- ***Дисперсия***

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

- ***Среднее квадратическое отклонение***

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Задача 1. Случайная величина X – интервал времени между приходами клиентов в банк, имеет показательное распределение. В отделение банка приходят 20 клиентов в час. Предположим, что в банк уже пришел один клиент. Какова вероятность того, что следующий клиент придет в течение 6 мин?

Задача 2. Случайная величина X - время безотказной работы прибора, имеет показательное распределение. Среднее время работы прибора 1000 часов. Найти плотность и функцию распределения времени, которое проработает прибор; вероятность того, что прибор проработает не менее 1100 часов; вероятность того, что прибор проработает от 400 до 500 часов.

Задача 3. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 часов. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти:
а) выражение его плотности вероятности и функции распределения;
б) вероятность того, что в течение 100 часов прибор не выйдет из строя.

Задача 4. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X*, распределенная по показательному закону с параметром λ=1/3 (1/день). Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 5 дней.

Задача 5. Предполагая, что случайное время обслуживания абонента службой «09» распределено по показательному закону и средняя продолжительность обслуживания составляет 1,5 минуты, найдите вероятность того, что абонент будет обслужен более, чем за 2 минуты.

Задача 6. Длительность телефонного разговора подчиняется показательному закону. Найти среднюю длительность разговора, если вероятность того, что разговор продлится более 5 минут, равна 0,4.

Задача 7. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X*, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

Задача 8. Известно, что время работы прибора до первого отказа подчиняется показательному распределению со средним значением 1 год. Какова вероятность, что до первого отказа пройдет не менее 2 лет?